



TITLE:

熱対流に起因する地球磁場閉じ込め(熱対流の数理)

AUTHOR(S):

宇都宮, 浩之; 高木, 隆司

CITATION:

宇都宮, 浩之 ...[et al]. 熱対流に起因する地球磁場閉じ込め(熱対流の数理). 数理解析研究所講究録 1996, 970: 177-187

ISSUE DATE:

1996-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60671>

RIGHT:

熱対流に起因する地球磁場閉じ込め

東京農工大学 宇都宮浩之 (Hiroyuki Utsunomiya)

東京農工大学 高木隆司 (Ryuji Takaki)

要旨

本研究は、地球磁場がなぜ無くなってしまわないのかという問題に対して、電気伝導度の温度依存性も重要であることを示唆することを目的とするものである。現在、地球磁場生成に関して有力であるダイナモ理論では、地球の外核部分の乱流を要因とする。本研究では、外核内の対流は簡単な定常流であるとし、さらに電気伝導度が温度とともに減少することを仮定する。流体力学の方程式とマクスウェルの方程式から導かれた基礎方程式をもとにして、2次元的な対流と磁場分布を仮定して磁場分布を求める。その結果、水平方向の磁場が対流によって下側（地球の内部方向）に押しつけられることを示すことができた。

1 序論

地球の内部構造は地殻、マントル、核の3つに分けられ、核はさらに内核と外核とに分けられる（図1）。内核は強大な圧力によって固体化しているが、外核は流動性があると考えられている。外核の上層と下層とでは1500～2000 K程の温度差があり、地球中心の方が高い。その主成分は金属であるので、外核内に温度分布があると、磁束の凍結をもたらす電気伝導度も一様でなくなる。そこで、以下に述べるような磁束が下側に閉じ込められる機構を考える。

磁力線が引きずられる程度は、透磁率を μ 、電気伝導度を σ とすると $\frac{1}{\mu\sigma}$ で定義される磁気拡散率で与えられ、この値が小さければ凍結が強くなる。核の主成分である金属（溶融鉄）の電気伝導度 σ は、温度上昇に対して負の依存性を持つので、外核の上方では磁気拡散

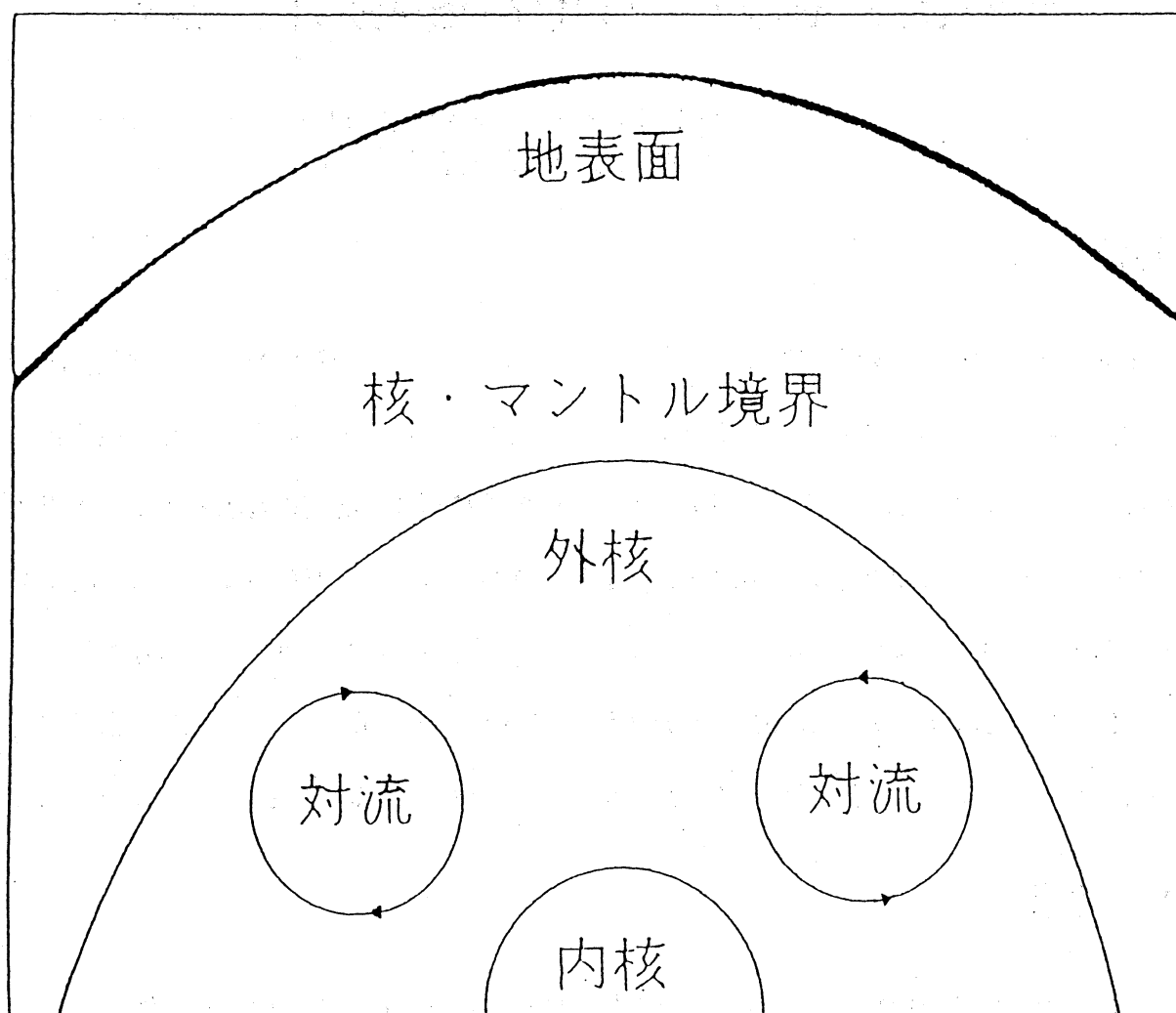


図 1: 地球の内部

率が小さく、下方では大きくなる。そこで、外核内に熱対流があると、上昇流のところに比べて下降流のところでは温度が低く、磁力線の凍結性が強くなっているはずである。これから、磁力線が下降流に引っ張られて徐々に下方（地球中心）へ動くと予想される。本研究では、外核内の熱対流の流れ分布は与えられたものとし、それによって決まる磁場分布を求めることにする。そこで、電気伝導度の温度依存性を考慮した基礎方程式をここで導いておく。

2 基礎方程式の導出

流れ場 u を伴うマクスウェルの方程式と、オームの法則は、次のように書かれる。

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad (1)$$

$$\mathbf{i} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad , \quad (2)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad , \quad (4)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad . \quad (5)$$

定常状態を仮定すると、(1),(3)は

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} \quad , \quad (6)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0 \quad . \quad (7)$$

となる。

(6)の両辺の rot をとり、(2)を用いると

$$\text{rotrot}\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{i} = \nabla \times \{\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})\} \quad . \quad (8)$$

ここで、ベクトル解析の公式 $\text{rot}(\phi A) = \phi \text{rot} A + \text{grad} \phi \times A$ を用いると (8) の右辺は

$$\sigma \{ \text{rot} E + \text{rot}(u \times B) \} + \text{grad} \sigma \times (E + u \times B) \quad .$$

となる。

ここで、さらに次のような仮定をおく。まず ε, μ, σ については、 T を温度とするとき $\varepsilon, \mu = \text{const.}$, $\sigma = \sigma(T)$ とする。非圧縮流を仮定し、 $\text{div} u = 0$ とする。流体は電氣的に中性であるとし、 $\rho = 0$ 。これから、 $\text{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$ である。以上から、 $E = \text{const.}$ であるが、本研究では $E = 0$ 、つまり電場は 0 と仮定して解析を進めることにする。

これらの仮定を用いると、(8) は次式に帰着する。

$$(u \cdot \nabla) B = (B \cdot \nabla) u + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 B + \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \times (u \times B) \quad . \quad (9)$$

これが解析に用いる基礎方程式であり、右辺第 3 項が σ の不均一からくる磁力線の輸送を表わす。 σ は温度分布 $T(x, z)$ を通して空間座標に依存するから、

$$\nabla \sigma = \frac{d\sigma}{dT} \nabla T \quad . \quad (10)$$

である。一般に金属では $\frac{d\sigma}{dT} < 0$ であり、鉄ではその大きさは 10^{-2} 程度である。外核内にある 2000 K の温度差を考えると、これは無視できない大きさである。

3 磁場分布の決定

3.1 空間配置と境界条件

本研究は、予備的な解析であるので、流れ場、磁場ともに 2 次元の配置に話を限る。

対象領域を図 2 に示す。長方形の領域を考え、 x 方向は水平、 z 方向は鉛直上方であり、水平方向には周期的境界条件をおく。

上下境界での境界条件は、

$$B_z = 0 \quad , \quad z = \pm \frac{d}{2} \quad . \quad (11)$$

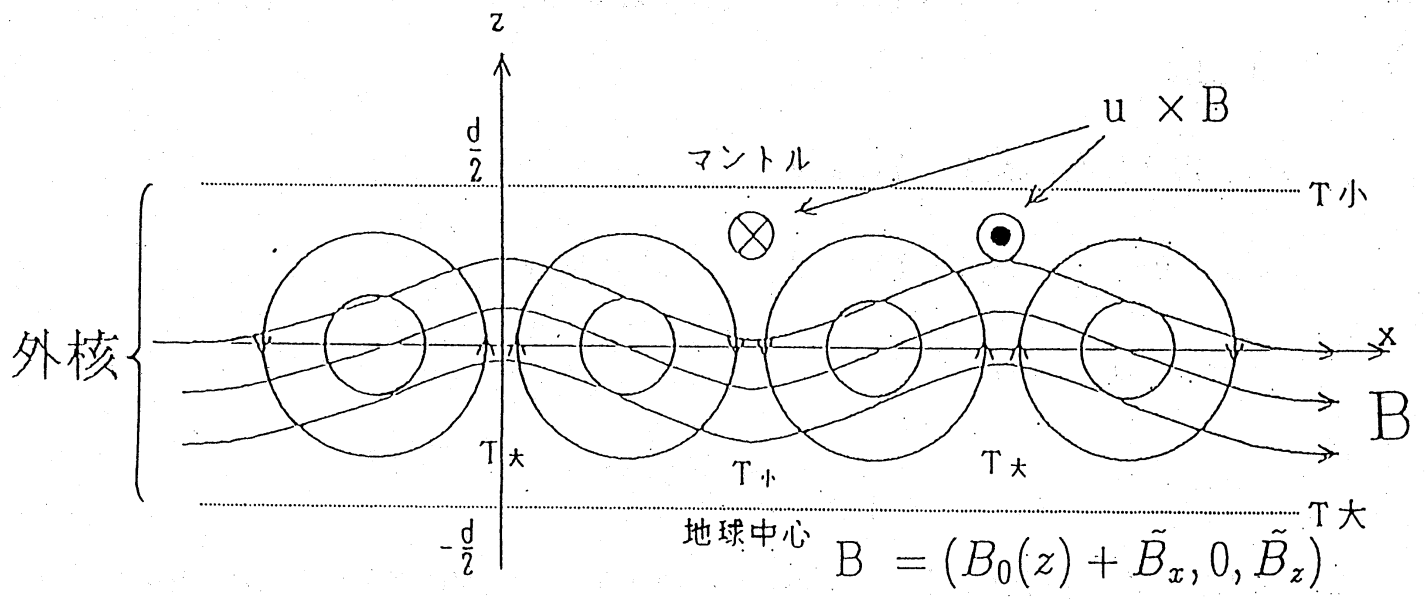


図 2: 2次元対流と水平方向の磁場

とする。すなわち、磁力線は境界を横切って出ていかない。さらに、 B_x を平均値 $B_0(z)$ と変動分 \tilde{B}_x との重ね合わせと考え、磁束の総量に対して次の条件をおく。

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_0(z) dz = \Phi = \text{given} \quad (12)$$

すなわち、磁束の総量は変化しないので、その磁場が層内でどのように分布するのが問題である。

3.2 温度分布と流速分布の仮定

温度分布 $T(x, z)$ と流速分布 $\{u(x, z), 0, w(x, z)\}$ を次のように与える。

$$T = T_0(z) + \tilde{T}(x, z) \quad , \quad \begin{cases} T_0 = \frac{T_H + T_L}{2} - \frac{T_H - T_L}{d} z \\ \tilde{T} = T_1 \cos kx \cos kz \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} u = u_1 \sin kx \sin kz \\ w = w_1 \cos kx \cos kz \end{cases} \quad (14)$$

ただし、水平方向の波長の半分（対流ロールの水平サイズ）が層の厚さに等しいと仮定する。すなわち

$$k = \frac{\pi}{d} \quad (15)$$

磁場分布を、次のように平均値 $B_0(z)$ と変動部分 \tilde{B}_x, \tilde{B}_z とに分ける。

$$\mathbf{B} = \{B_0(z) + \tilde{B}_x(x, z) \quad , \quad 0 \quad , \quad \tilde{B}_z(x, z)\} \quad (16)$$

\tilde{B}_x, \tilde{B}_z も、 x 方向には周期 $\frac{2\pi}{k}$ を持つ周期関数である。

これまでの仮定のみで \tilde{B}_x, \tilde{B}_z の形を決めることは、式が複雑で大変困難である。そこで、対流や温度変動、磁力線の変形が弱いと仮定し、 ε を微小パラメーターとして

$$u, w, \tilde{B}_x, \tilde{B}_z, \tilde{T}(x, z) \simeq O(\varepsilon)$$

とおく。これを (9) に代入し、微小量の2次以上の項を無視することにする。

(9) を x, z 成分に分け、微小量の 2 次以上の項を無視すると

$$x \text{ 成分} : w \frac{\partial B_0}{\partial z} = B_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 B_x - \frac{w B_0}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_0}{dz} , \quad (17)$$

$$z \text{ 成分} : -B_0 \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 B_z . \quad (18)$$

を得る。ただし、(17) と (18) は独立な式ではなく、 $\frac{\partial}{\partial x}(17)$ は $-\frac{\partial}{\partial z}(18)$ に一致することを注意しておく。

\tilde{B}_x と \tilde{B}_z の周期性、および図 2 に示した磁場配置を考慮すると、

$$\begin{cases} \tilde{B}_x(x, z) = B_{x1}(z) \cos kx \\ \tilde{B}_z(x, z) = B_{z1}(z) \sin kx \end{cases} , \quad (19)$$

とおくことができる。(14) に示した流速の係数 u_1, w_1 、および (19) の係数 B_{x1}, B_{z1} には、 $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ より

$$u_1 = w_1 , \quad (20)$$

$$kB_{x1}(z) = B'_{z1}(z) . \quad (21)$$

が成り立つ。

B_{x1}, B_{z1} を求める手続きは、以下のように行なう。(17) に (19) を代入すると、

$$\begin{aligned} w_1 \cos kx \cos kz \frac{\partial B_0}{\partial z} - B_0 k u_1 \cos kx \sin kz - \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\sigma} w_1 \cos kx \cos kz \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_0}{dz} \\ = \frac{1}{\mu\sigma} \left\{ -B_{x1}(z) k^2 \cos kx + B''_{x1}(z) \cos kx \right\} . \end{aligned} \quad (22)$$

この式は、 $\cos kx$ に比例する項と、 $\cos kx$ を含まない項 $\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2}$ から成る。後者の値は 0 であり、

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} = 0 , \quad \text{したがって} \quad B_0 = az + b . \quad (23)$$

ただし、条件 (12) から

$$b = \frac{\Phi}{d} . \quad (24)$$

一方、 $\cos kz$ に比例する項を集め、(23) を代入すると

$$\therefore B''_{x1} - k^2 B_{x1} = \mu\sigma \left\{ aw_1 \cos kz - (az + b)ku_1 \sin kz + \frac{w_1}{\sigma}(az + b) \cos kz \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_0}{dz} \right\} \quad (25)$$

3.3 近似解

(25) の厳密解は困難なので、近似解を求めるために B_{x1} を次のように仮定する。

$$B_{x1} = (C_1 z + C_2) \cos kz + (C_3 z + C_4) \sin kz \quad (26)$$

z で微分すると

$$B'_{x1} = C_1 \cos kz - (C_1 z + C_2)k \sin kz + C_3 \sin kz + (C_3 z + C_4)k \cos kz,$$

$$B''_{x1} = -2kC_1 \sin kz - k^2(C_1 z + C_2) \cos kz + 2kC_3 \cos kz - k^2(C_3 z + C_4) \sin kz.$$

境界条件 $B'_{x1}(\pm \frac{d}{2}) = 0$ から、

$$C_1 = 0, \quad kC_2 = C_3 \quad (27)$$

となる。(27) を (25) に代入すると、

$$\begin{aligned} -2k^2(kC_2 z + C_4) \sin kz &= \mu\sigma \left\{ aw_1 \cos kz - (az + b)ku_1 \sin kz \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_1}{\sigma}(az + b) \cos kz \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_0}{dz} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで a と $\frac{d\sigma}{dT}$ について次のように仮定する。 $\frac{d\sigma}{dT}$ が 0 でないことによって a も 0 でなくなるので、もし $\frac{d\sigma}{dT}$ が微小であれば a も微小であろう。そこで $a, \frac{d\sigma}{dT}$ を同程度の微小量としてその 2 次の項である $a \frac{d\sigma}{dT}$ を 0 とおく。すると (28) より、係数を比較して a, C_2, C_4 が決まる。

$$\begin{cases} a = -\frac{b}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_0}{dz}, \\ C_2 = -\frac{\mu u_1 b}{2k^2} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_0}{dz}, \\ C_4 = \frac{\mu \sigma u_1 b}{2k}. \end{cases} \quad (29)$$

4 結果と考察

以上の近似解に次のような値を代入した結果を図3に示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 1.26 \times 10^{-6} [N/A^2], \quad k = 1.57 \times 10^{-6} [1/m], \quad u_1 = 1.00 \times 10^{-4} [m/s], \\ \sigma = 3.65 \times 10^5 [1/\Omega m], \quad \Phi = 600 [Wb], \\ \frac{d\sigma}{dT} = -71.12 [1/\Omega m K], \quad \frac{dT_0}{dz} = -7.50 \times 10^{-4} [K/m]. \end{array} \right.$$

図からわかるように、磁力線は下側へ押しつけられ、対流層の下半分では磁場が強くなる傾向がある。上下の強さの比は、 $B_0(-\frac{d}{2})/B_0(+\frac{d}{2}) \simeq 1.40$ でありこれは無視のできない大きさである。したがって、地球磁場の閉じこめ機構に大きな影響を与えるであろう。

本研究では、2次元性および微小量の仮定等、多くの仮定を行った。より厳密に解くことが期待される。なお、磁気拡散率の値については、実際に近い値を推定して使用した。ところが、(25)式からもう一つ制約条件がでてくる可能性がある。それは、この式の両辺に $e^{\pm kz}$ をかけて $(-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2})$ の範囲で積分すると、この関数が左辺の演算子の固有関数であるので、一種の可解条件を与えるということである。この可能性についても今後検討する予定である。

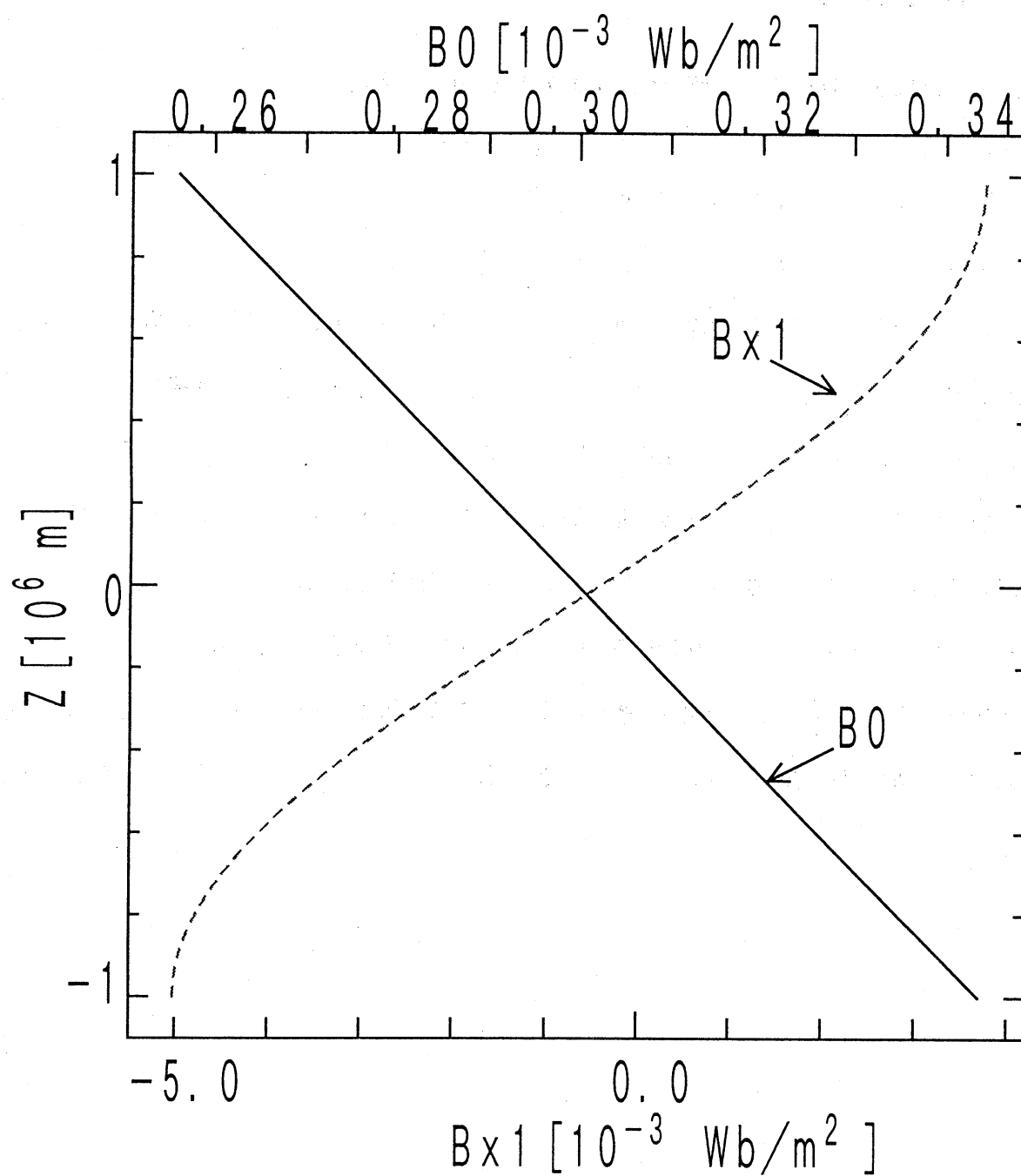


図 3: B_0, B_{x1} の図示

参考文献

- (1) 高木 隆司：流れの物理 朝倉書店 (1988)
- (2) 高木 隆司：摂動法，変分法，ガレルキン法 日本物理学会誌 (Vol.31, No.1, 1976)
- (3) 古澤 徴：乱流磁気ダイナモ 日本物理学会誌 (Vol.46, No.9, 1991)
- (4) 古澤 徴：乱流ダイナモ：平均場理論
- (5) 力武 常次：地球磁場とその逆転 サイエンス社 (1980)
- (6) 北原 順一：一般地科学 築地書館 (1979)
- (7) 力武 萩原：物理地学 東海大学出版会 (1976)
- (8) 早川 正巳：地球熱学 東海大学出版会 (1988)
- (9) 木村 竜治：地球流体力学入門 東京堂出版 (1983)